Amy/Nava Yemhelha/ELY MENI/Dahane Aïchetou/Boumeïss

/Ex06/:

1) $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

Comme la fonction $t \longrightarrow \frac{t^n}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; elle est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;1]$ d'où l'intégralle U_n existe et l'écriture $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ définie bien une suite numerique (U_n)

2) $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et

$U_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt$

On a : $0 \leq t \leq 1$ et en multipliant par $\frac{t^n}{1+t^2}$ qui est ≥ 0 sur $[0;1]$

On obtient :

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$$

D'ou : $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq U_{n+1} \leq U_n$$

D'où (U_n) est $\searrow$ et positive et comme elle est $\searrow$ et minorée pour (0) elle est donc convergente.

3) $U_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

$$0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$$

Et en multipliant par t^n (qui est ≥ 0 sur $[0;1]$) on obtient

$$\frac{1}{2} t^n \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$$

Donc : $\frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt$

D'où $\frac{1}{2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - 0\right) \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} - 0$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

D'ou d'après le T.G

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} U_n = 0}$$

Yemhelha|ELY MENI|Dahane AMY|Nava
Aïchetou|Boumeis

Exo7 :

$f(x) = x^2 - 2x + a$
et $g(x) = -x^2$
En un point d'abscisse x_0 une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est :
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
et une équation de la tang à $\mathcal{C}_f$ est $y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$

On doit donc avoir :
$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

Calculons $f'(x)$ et $g'(x)$

$$\begin{cases} f'(x) = 2x - 2 \\ g'(x) = -2x \end{cases}$$

D'où On doit avoir :
$$\begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + a = -x_0^2 \\ \text{ou} \\ 2x_0 - 2 = -2x_0 \end{cases}$$

De (2) On a :
$$\begin{cases} 4x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et en remplaçant dans (1) On obtient :
$\frac{1}{4} - 1 + a = -\frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{2}$
$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

MENI Dahane AMY INava Yemhetha ELY Aïchetou Boumeïs

$\boxed{\text{Exo12}}$:

1) On pose $t = a + b - x$

$\begin{cases} x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$

$dt = -dx$

$\int_a^b f(a+b-x)\,dx =$

$\int_b^a f(t)\,(-dt) =$

$-\int_b^a (ft)\,(dt) =$

$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx}$$

2)

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

On pose $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ car quotient de deux fonctions continues:

On prend: $a = 0$
$b = \frac{\pi}{2}$

donc: $a + b - x = \frac{\pi}{2} - x$

$f(a+b-x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$
$= \frac{\cos^3 x\,(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos^3 x\,(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^3 x(\frac{\pi}{2} - x)}$
$= \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

D'après (1) $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\int \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

$\boxed{J = I}$

On a: $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\,dx$

$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{I + J = \frac{\pi}{2}}$ $\begin{cases} I = J \\ I + J = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = J = \frac{\pi}{4}$

3) On pose $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}$
$a = \frac{\pi}{6}$; $b = \frac{\pi}{3}$ f est continue sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ On a: $f(a+b-x) =$

$f(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$

$\Rightarrow \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} - \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}$

$\Rightarrow \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x} = -f(x)$

D'après (1) $= \int_{\pi/6}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} f(\frac{\pi}{2} - x)dx$

$\int_{\pi/6}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = -\int_{\pi/6}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

$K = -K$

$\boxed{K = 0}$

Yemhelha | Meni | AMY | Aichetou

Exo 14:

1) La fonction $\left[x \mapsto C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right]$ est le produit de fonction continue, Alors l'intégrale $I_{n;k}$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ et $0 \leq k \leq n$

2) $I_{k+1, n} = \int_0^1 C_n^{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} dx$

$k < n$

On pose $\begin{cases} u(x) = C_n^{k+1} x^{k+1} \\ v'(x) = (1-x)^{n-k-1} \end{cases}$

$= -(-1)(1-x)^{n-k-1}$

$\begin{cases} u'(x) = (k+1)(C_n^{k+1} x^k) \\ v(x) = \dfrac{-1}{n-k}(1-x)^{n-k} \end{cases}$

$I_{k+1, n} = \left[C_n^{k+1} x^{k+1} \times -\dfrac{1}{n-k} (1-x)^{n-k} \right]_0^1 - \int_0^1 -\dfrac{(k+1)}{n-k} \times C_n^{k+1} x^k (1-x) dx$

$I_{k+1, n} = \int_0^1 \dfrac{k+1}{n-k} C_n^{k+1} x^k (1-x)^{n-k} dx$

On a : $\dfrac{k+1}{n-k} C_n^{k+1} = \dfrac{k+1}{n-k}$

$\dfrac{n!}{(n-k-1)(k+1)} = \dfrac{(k+1)\, n!}{(n-k)(k+1)\, k!}$

$\dfrac{n!}{(n-k)!\, k!} = C_n^k$

alors : $I_{k+1, n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} dx$

$= I_{k n}$

Jemhelha Ely Amy/Nava MENI/Dahane
Aïchetou/Boumeiss.

Exercice 8.

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2x+x\cos^2x)\,dx$

$I+J=\int_0^{\pi/2}x(\sin^2x+\cos^2x)\,dx$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx$

$I+J=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2}$

$I+J=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right)$

$\Rightarrow \boxed{I+J=\frac{\pi^2}{8}}$

2) on a $I-J=\int_0^{\pi/2}(x\sin^2x-x\cos^2x)\,dx$

$I-J=\int_0^{\pi/2}x(\sin^2x-\cos^2x)\,dx$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x\cos 2x)\,dx$

on utilise une I.P.P:

on pose : $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=\cos 2x\end{cases}$

Alors : $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x.\end{cases}$

Comme $\int uv'=uv-\int u'v$

$I-J=\left[-x\times\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$I-J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)\,dx$

$I-J=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I-J=-\frac{1}{4}\cos\pi+\frac{1}{4}\cos 0$

$\boxed{I-J=\frac{1}{2}}$

on résout le système : $\begin{cases}I+J=\frac{\pi^2}{8}\\ I-J=\frac{1}{2}\end{cases}$

Par addition : $2I=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi^2+8}{16}}$

Par soustraction :

$2J=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{J=\frac{\pi^2-8}{16}}$

MENI|Dahane Yemhelha|Ely AMY|Nava
Aïchetou|Boumeiss.

Exercice 1 :

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^k-1}{x-1} = \frac{1^k-1}{1-1} = 0\ (f.I)$.

on pose $g(x) = x^k \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 \\ g'(x) = k \cdot x^{k-1} \end{cases}$

$g'(1) = k$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = k$.

2e methode

on a $1 + x + x^2 + \dots + x^n = 1 \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$1 + x + \dots + x^{k-1} = \frac{x^k-1}{x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^k-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1})$.

$= 1 + 1 + \dots + 1 = k$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2015} - 2015}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + \dots + (x^{2015}-1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x^1-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \dots + \frac{x-1}{x-1} \right] = (1 + 2 + \dots + 2015)$

$= \frac{2015}{2}(1 + 2015) = 2015 \times 1008$

Somme de terme d'une S.A.

Aïchetou | Boumeiss MENI | Dahane Yembetha | Ely
AMY | Nava .

Exercice 10.

* $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(4x+5)^2}$; $t = 4x+5$.

$x = 1 \Rightarrow t = 9$.

$x = 2 \Rightarrow t = 13$.

$dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$.

$I_1 = \int_9^{13} \frac{1}{4} \times \frac{1}{t^5} dt$.

$1/4 \int_9^{13} t^{-5} dt \Rightarrow 1/4 \left[\frac{1}{-4} t^{-4}\right]_9^{13}$

$\boxed{I_1 = \frac{-1}{16}\left(13^{-4} - 9^{-4}\right)}$

* $I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; $x = \tan t$.

$x = 1 \Rightarrow \tan t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

$x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \pi/3$.

$dx = (1+\tan^2 t) dt$.

$dx = (1+x^2) dt$.

$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}} dt$

$I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dt \Rightarrow I_2 = [t]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$I_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{\pi}{12}}$

* $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{4dx}{1+\cos x}$; $t = \tan\frac{x}{2}$

$x = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0$.

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) dx$

$dt = \frac{1}{2\cos^2 x/2} dx$

$dx = 2\cos^2\frac{x}{2} dt$

On sait que : $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

Pour $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors

$I_3 = \int_0^1 \frac{4 \times 2\cos^2\frac{x}{2} dt}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$I_3 = \int_0^1 4 dt$.

$I_3 = [4t]_0^1 \Rightarrow \boxed{I_3 = 4}$

* $I_4 = \int_2^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$

$t = x-1$

$x = 2 \Rightarrow t = 1$.

$x = 3 \Rightarrow t = 2$.

$dt = dx$.

$t = x-1 \Rightarrow x = t+1$.

$I_4 = \int_1^2 \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}} dt$

$= \int_1^2 \frac{(t^3+3t^2+3t+1)}{t^{1/2}} dt$

$I_4 = \int_1^2 \left(t^{5/2} + 3t^{3/2} + 3t^{1/2} + t^{1/2}\right) dt$

$I_4 = \left[2/7\, t^{7/2} + 6/5\, t^{5/2} + 2t^{3/2} + 2t^{1/2}\right]_1^2$

$\boxed{I_4 = \sqrt{2}\left(\frac{16}{7} + \frac{24}{5} + 6\right) - \left(2/7 + 6/5 + 4\right)}$

* $I_5 = \int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3x+2} dx$

1ère étape : $t = \sqrt{x+1}$.

$x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{3}$.

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$

$\frac{1}{2t} dx \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

On sait que :

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2).$$
$$= t^2(t^2+1).$$

Alors
$$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t \cdot 2t}{t^2(t^2+1)}\, dt$$

$$I_5 = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1}$$

2e étape : $t = \tan u$.

$t = 1 \Rightarrow \tan u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

$t = \sqrt{3} \Rightarrow \tan u = \sqrt{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$

$dt = (1+\tan^2 u)\, du$.

$$I_5 = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \frac{(1+\cancel{\tan^2 x})}{\cancel{\tan^2 x+1}}\, du$$

$$I_5 = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} du$$

$$I_5 = [2u]_{\pi/4}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I_5 = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_5 = \frac{\pi}{6}}$$

Yemhelha | Ely MENI | Dahan AMY | Nava
Aïchetou | Baumeiss.

Exercice 4 :

Solution

Soit $h(x) = f(x) - bx$
$h(a) = f(a) - b(a) < ab - ab < 0$
$h(b) = f(b) - bb > b^2 - b^2 > 0$
$\Rightarrow h(a) \times h(b) < 0$
$\Rightarrow 0 \in h(I)$.
D'après le T.V.I :
$\exists c \in [a;b] : h(c) = 0$
$f(c) - bc = 0$
$f(c) = bc$

MENI|Dahane Aichetou|Baba Yemhelha|ELy
AMY|Navaa

Exercice 4 :

Solution :

1) on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ Soit $f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ peut être sous la forme :

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} (x+\sqrt{x^2+1})\, dx$$

D'où $I = \left[\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(1)^2$$

Enfin : $I = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$

L'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} dx$ peut être sous la forme :

$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} dx$ d'où $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1$$

Enfin $J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

AMY|Nava Yemhelha|ELY Aïchetou|Boumeïss
MENI|Dahane

Exercice 2 :

Solution :

1) $ax+b+\frac{c}{(x+1)^2} = f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2(ax+b)+c}{(x+1)^2} = f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

$\Rightarrow \frac{(x^2+2x+1)(ax+b)+c}{(x+1)^2} = f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

$= \frac{ax^3+bx^2+2ax^2+2bx+ax+b+c}{(x+1)^2} = f(x)\ \forall x \in D_f$

$= \frac{ax^3+(b+2a)x^2+(2b+a)x+b+c}{(x+1)^2} = \frac{x^3+3x^2+3x-3}{(x+1)^2}$

$\begin{cases} a=1 \\ b+2a=3 \\ 2b+a=3 \\ b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3-2\times 1=1 \\ 2\times 1+1=3 \\ c=-3-1=-4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-4 \end{cases}$

$\forall x \in D_f\ ,\ f(x) = x+1 - \frac{4}{(x+1)^2}$

2) $\forall x\ D_f\ ,\ f(x) = x+1 - \frac{4}{(x+1)^2}$

Donc $F(x) = x^2 + x + \frac{4}{(x+1)}$ est une primitive de f sur $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; +\infty[$.